التحليل البُعدي ودوره في اتخاذ القرار

د. مصطفى بابكر

نظرية بيز، التحليل البعدي ودوره في اتخاذ القرار

التحليل البعدي (Posterior Analysis)

- يعرف التحليل الذي تسند فيه الاحتمالات المسبقة لحالات الطبيعة بالتحليل القبلي أو المسبق (Prior Analysis) كما في الأجزاء السابقة. بناءً على التحليل المسبق علينا أن نقرر في أن نتخذ الفعل الأمثل الذي يقترحه التحليل المسبق أو الانتظار والبحث عن معلومات إضافية من خلال البحث السوقي، مسوحات المستهلك، دراسة لمعاينة المنتج أو أي طرق أخرى وتسمى هذه المعلومات الإضافية بمعلومات العينة (Sample Information).

- نستخدم معلومات العينة في تنقيح وتصحيح الاحتمالات المسبقة لحالات الطبيعة وذلك بدمج الاثنين معا باستخدام قانون بيز الذي سبقت الإشارة إليه عند استعراض الاحتمالات لإيجاد الاحتمالات المصححة أو المنقحة والتي تعرف بالاحتمالات البعدية (Posterior Probabilities) . ويعرف حساب القيمة النقدية المتوقعة EMV أو التكلفة المتوقعة للفرص الضائعة EOL باستخدام الاحتمالات البعدية بالتحليل البعدي.

- افترض أن هنالك عدد k من المؤشرات يمكن أن تشير لها دراسة العينة $I_1, I_2, \ldots I_k$. افترض أننا بعد الحصول على معلومات العينة عرفنا أي المؤشرات I_j قد حدث فعلاً وعليه نود أن نستخدم هذه المعلومة في تصحيح تقديرنا المسبق لاحتمالات حالات الطبيعة المختلفة. وتؤدي هذه العملية إلى الحصول على الاحتمالات البعدية والتي يعبر عنها بصيغة الاحتمال المشروط (Conditional Probability) $P(S_i/I_j)$ وتقرأ احتمال الحالة S_i إذا عرفنا المعلومة أو المؤشر I_j من دراسة العينة.

- لكي يتسنى لنا حساب الاحتمال المشروط $P(S_i/I_j)$ يجب علينا أن نعرف شئ عن العلاقة الاحتمالية بين المؤشرات وحالات الطبيعة، أي أننا نحتاج لمعرفة الاحتمالات المشروطة $P(I_j/S_i)$ لكل المؤشرات وكل حالات الطبيعة. ويمكن إيجاد هذه الاحتمالات الأخيرة من البيانات التاريخية أو من التقدير الذاتي في حالة عدم توفر البيانات التاريخية. وتمثل هذه الاحتمالات المشروطة إمكانية الحصول على المعلومة I_j من دراسة العينة في وجود حالة الطبيعة S_i .

- تعرف عملية تحديد ما إذا كانت هنالك حاجة لجمع البيانات الإضافية قبل اتخاذ القرار الفاصل بالتحليل قبل البعدي (Preposterior Analysis). ولتوضيح هذه العملية وكيفية الحصول على المعلومات الإضافية ووضعها في صيغة الاحتمالات المشروطة نعطي المثال التالي $P(I_j/S_i)$.

مثال 1:

تود شركة ماكدونالد إنشاء مبنى جديد بالقرب من مركز للتسوق يؤمه السياح. هنالك ثلاثة أحجام ممكنة للمبنى 3000(a_1) ، 5000(a_2) ، أو 9000(a_3) قدم مربع اعتماداً على مستوى الطلب اليومي المتوقع ضعيف (s_1) ، متوسط أو مرتفع. وقد قرر مستشاري الشركة احتمالات الطلب الضعيف (s_1) ، الطلب المتوسط (s_2) والطلب المرتفع (s_3) أنها تساوي 0.2، 0.3، و 0.5 على التوالي. ويوضح الجدول أدناه المنافع والقيم النقدية المتوقعة للأفعال. المطلوب تحليل الأفعال المتاحة للشركة فيما يختص بالمشروع.

		State of Nature (حالة الطبيعة)			
Action (الفعل)		s_1 $P(s_1) = 0.2$	s_2 $P(s_2) = 0.3$	s_3 $P(s_3) = 0.5$	EMV
	a_1	10,000	15,000	20,000	16,500
	a_2	-5,000	25,000	30,000	21,500
	a_3	-15,000	-10,000	60,000	24,000

الحل:

- بفحص العمود الأخير في الجدول يشير التحليل القبلي أو المسبق أن إنشاء مبنى كبير الحجم (9000 قدم مربع) هو القرار الأمثل حيث يحقق أعلى ربح متوقع للشركة بين كل الخيارات المتاحة 24,000$) .

- في المقابل إذا عرفنا مسبقاً أن حالة الطلب هي s_1 فالخيار الأمثل هو a_1 ، حالة الطلب s_2 فالخيار الأمثل هو a_2 ، وحالة الطلب s_3 فالخيار الأمثل هو a_3 وعليه في حالة المعرفة التامة تكون القيمة المتوقعة $39,000 (10,000×0.2+25,000×0.3+60,000×0.5) . وعليه فإن القيمة المتوقعة للمعرفة التامة تساوي $15,000 (39,000–24,000) . أي أن على الشركة ألا تنفق أكثر من $15,000 للحصول على أي معلومات إضافية تساعد في اتخاذ القرار بشأن المشروع.

- افترض أن الشركة استأجرت بيت ولسن للاستشارات لإجراء مسح سوقي للحصول على معلومات إضافية عن مستوى الطلب. وقد أشار تقرير بيت الاستشارات أن مستوى الطلب سيكون متوسط.
- إذا اعتمدت الشركة على التقرير بأنه 100% صحيح تكون الاحتمالات المصححة هي $P(s_1) = 0$، $P(s_2) = 1$ و $P(s_3) = 0$ ويكون الفعل الأمثل هو a_2. غير أنه من الخطأ اعتبار التقرير 100% صحيح وبالتالي مساواة المؤشرات من دراسة العينة بحالات الطبيعة لأن دراسة العينة معرضة لأخطاء عديدة بالإضافة لخطأ المعاينة. عليه لا بد من تقييم بيانات العينة بالرجوع إلى السجل التاريخي.

- افترض أن هنالك ثلاث مؤشرات يمكن الحصول عليها من بيانات العينة: I_1 يشير إلى ضعف الطلب، I_2 يشير إلى كون الطلب متوسط، و I_3 يشير إلى ارتفاع الطلب. افترض أنه بناءً على المسوحات السابقة أن احتمالات صحة تقديرات بيت الاستشارات للمؤشرات في ظل حالات الطبيعة الثلاثة $\left(P\left(I_j/S_i\right), i=1,2,3\right)$ هي كما يبينها الجدول أدناه:

	State of Nature (حالة الطبيعة)			
Sample Information		s_1	s_2	s_3
	I_1	0.7	0.2	0.1
	I_2	0.2	0.6	0.4
	I_3	0.1	0.2	0.5

- لحساب الاحتمالات البعدية $P(S_i/I_j)$ من الاحتمالات المسبقة $P(s_i)$ ومعلومات العينة $P(I_j/S_i)$ نستخدم نظرية بيز.

نظرية بيز

د. مصطفى بابكر

نظرية بيز (Bayes' Theorem)

- يعتبر بيز من أوائل الإحصائيين الذين أشاروا إلى إمكانية تنقيح أو تصحيح الاحتمالات في ضوء معلومات العينة اللاحقة ومساهمة بيز في هذا المجال هو إعطاء طريقة لحساب الاحتمالات المشروطة.
- لشرح نظرية بيز افترض أن مجال العينة لتجربة عشوائية هو الأحداث المتنافية E_1، E_2، ...، E_k ذات احتمالات الحدوث $P(E_1)$، $P(E_2)$، ... $P(E_k)$ والتي تعرف بالاحتمالات المسبقة لأنها تحدد قبل أخذ المعلومات الإضافية في الحسبان. كما تسمى الاحتمالات المنقحة في ضوء معلومات العينة بالاحتمالات البعدية لأنها تحسب بعد أخذ المعلومات الإضافية في الحسبان.

- إذا كانت A تمثل المعلومات الإضافية فإن احتمال الحدث E_i معطي المعلومة A يعطى بالقانون:

$$P(E_i/A)=\frac{P(E_i,A)}{P(A)}$$

ومن القانون العام لضرب الاحتمالات:

$$P(A,E_i)=P(E_i)\,P(A/E_i)$$

وبتعويض نتيجة قانون الضرب في المعادلة السابقة نحصل على الاحتمالات البعدية للحدث E_i :

$$P(E_i/A)=\frac{P(E_i)\,P(A/E_i)}{P(A)}$$

ويعرف هذا القانون بقانون بيز.

- في كثيرٍ من تطبيقات نظرية بيـز لا يعطى الاحتمال $P(A)$ والذي يعرف أيضا بمقدار المعلومـات (Amount of Information) مباشرة ولكن يمكن حسابه بالقانون:

$$P(A)=P(A,E_1)+P(A,E_2)+\ldots+P(A,E_k)$$

وبتطبيق قانون الضرب:

$$P(A)=P(E_1)\,P\left(A/E_1\right)+P(E_2)\,P\left(A/E_2\right)+\ldots+P(E_k)\,P\left(A/E_k\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}P(E_i)\,P\left(A/E_i\right)$$

وعليه في هذه الحالات يصبح قانون بيز:

$$P\left(E_i/A\right)=\frac{P(E_i)\,P\left(A/E_i\right)}{\sum_{j=1}^{k} P(E_j)\,P\left(A/E_j\right)}$$

- وبتطبيق نظرية بيز لحساب الاحتمالات البعدية متابعة لحل المثال I نحصل على القانون التالي:

$$P\left(S_i/I_j\right)=\frac{P(s_i)\,P\left(I_j/S_i\right)}{\sum_k P(s_k)\,P\left(I_j/S_k\right)}$$

حيث $k=1,2,3$ ، j ، i وحيث $P(I_j)=\sum_k P(s_k)\,P\left(I_j/S_k\right)$

والجدول أدناه يعرض قيم مكونات القانون للمثال:

وبتعويض قيم مكونات القانون نحصل على الاحتمالات البعدية الموضحة في الجدول التالي:

State of Nature	$P(s_i)$	$P(s_i)\,P(I_1/S_i)$	$P(s_i)\,P(I_2/S_i)$	$P(s_i)\,P(I_3/S_i)$
s_1	0.2	0.14	0.04	0.02
s_2	0.3	0.06	0.18	0.06
s_3	0.5	0.05	0.20	0.25
	1.0	$P(I_1)=0.25$	$P(I_2)=0.42$	$P(I_3)=0.33$

State of Nature	$P(S_1/I_1)$	$P(S_1/I_2)$	$P(S_1/I_3)$
s_1	0.56	0.095	0.061
s_2	0.24	0.429	0.182
s_3	0.20	0.476	0.757
	1.00	1.00	1.00

- بعد معرفة الاحتمالات البعدية يمكن حساب القيمة المتوقعة البعدية (Posterior Expected Payoff) أو القيمة النقدية المتوقعة للفعل a_i معطى معلومات العينة I_j بالقانون:

$$EMV\left(a_i/I_j\right)=\sum_{k=1}^{K}\pi_{ik}P\left(S_k/I_j\right)$$

وبتطبيق القانون على مثال مشروع شركة ماكدونالد نحصل على الجدول التالي للقيم المتوقعة البعدية:

Action (الفعل)	Sample Information		
	I_1	I_2	I_3
a_1	13,200	16,905	18,480
a_2	9,200	24,530	26,955
a_3	1,200	22,845	42,685

- إيجاد الفعل الأمثل:

* باتباع معيار القيمة النقدية المتوقعة وبمعرفة معلومات العينة I_j فإن الفعل الأمثل هو الذي يحقق أعلى قيمة متوقعة بعدية.
* بتطبيق المعيار على جدول القيم المتوقعة البعدية للمثال السابق نجد أن الفعل الأمثل هو a_1 عندما تكون معلومات العينة I_1، a_2 عندما تكون معلومات العينة I_2، و a_3 عندما تكون معلومات العينة I_3 .

* توجد القيمة النقدية المتوقعة للقرار الأمثل في ظل معلومات العينة بضرب القيم النقدية المتوقعة للأفعال المثلى أعلاه في احتمالات الحصول على معلومات العينة المقابلة لها ويرمز لهذه القيمة بـ EPSI أو (Expected Payoff with Sample Information)، أي:

$$EPSI = \sum_{j=1}^{k} \max_i \left[EMV\left(a_i / I_j\right) \right] P(I_j)$$

وبتطبيق قانون القيمة النقدية المتوقعة في ظل معلومات العينة على مثال شركة ماكدونالد نحصل على $27,688.65

(أي $13,200 \times 0.25 + 24,530 \times 0.42 + 42685 \times 0.33$)

* لتقييم جدوى جمع المعلومات الإضافية لا بد من مقارنة تكلفة الحصول على المعلومات بالفائدة المتوقعة من استخدام المعلومات. وتقاس الفائدة المتوقعة بحساب القيمة المتوقعة لمعلومات العينة أو (Expected Value of Sample Information) "EVSI" والتي تعرف بأخذ الفرق بين القيمة المتوقعة المثلى في ظل معلومات العينة والقيمة المتوقعة المثلى في غياب معلومات العينة، أي:

$$EVSI = EPSI - EMV^*$$

حيث EMV^* هي القيمة النقدية المتوقعة للفعل الأمثل باستخدام الاحتمالات المسبقة وفي عدم وجود معلومات العينة.

* بالتطبيق على مثال شركة ماكدونالد نجد أن القيمة المتوقعة لمعلومات العينة تساوي 3,688.5 (أي 27,688–24,000) . عليه فهنالك جدوى لجمع المعلومات الإضافية إذا كانت تكلفتها أقل من أو تساوي $3,688.65 .
* يعرف الفرق بين القيمة المتوقعة لمعلومات العينة وتكلفة العينة بصافي المكاسب المتوقعة من استخدام العينة (Expected Net Gain From Sampling) مثلاً إذا وافق بيت ولسن للاستشارات على توفير معلومات العينة بتكلفة $2000 يكون صافي المكاسب المتوقعة من استخدام معلومات العينة في المثال مساويا لـ $1,688.65 .

* أخيراً إذا أشار كما ذكرنا تقرير بيت الخبرة أن مؤشر العينة هو I_2 فإن القرار الأمثل هو اتخاذ الفعل a_2 أو تشييد مبنى متوسط الحجم حيث القيمة النقدية المتوقعة في ظل المعلومة I_2 أعلى ما تكون عند اتخاذ الفعل a_2.

* في الختام نكرر التنويه أن صحة التحليلات في هذا الجزء تعتمد كثيرا على دقة تقديرنا لجدول المنافع، الاحتمالات المسبقة والاحتمالات المبنية على معلومات العينة ولذلك يجب إجراء اختبارات التأثر (Sensitivity Analysis) حول هذه القيم وتحديد مدى حساسية القرار الأمثل للتغيرات الطفيفة في هذه القيم.